BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2015*

UOT 517.98

ƏMSALLARI ÜZƏRİNƏ ƏLAVƏ ŞƏRT QOYULMUŞ ALTI DƏRƏCƏLİ CƏBRİ TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ

E.A.QASIMOV, Ü.N.HƏSƏNOVA, A.O.HÜSEYNOVA
Bakı Dövlət Universiteti
u.hasanova@yahoo.com, aysel.huseynova.1992@inbox.ru

Ruffin-Abel teoreminə görə dərəcəsi beşdən kiçik olmayan $(n \geq 5)$ *cəbri tənliklərin radikallarla həllinin ümumi şəkildə tapılması qeyri-mümkündür. Lakin bu teorem cəbri tənliklərin xüsusi növlərinin köklərinin tapılması üçün bu və ya digər xüsusi üsulların olmasını istisna etmir.*

İşdə altı dərəcəli cəbri tənliyin xüsusi növünün radikallarla həll oluna bilməsi isbat edilir. Tənliyin əmsalları həqiqi ədədlər olduqda baxılan tənliyin köklərinin sırf kompleks ədəd olmaması üçün kafi şərt göstərilir.

Açar sözlər: cəbri tənlik, tənliyin kökü, radikallarla həll.

$$F(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \; . \qquad (1)$$

(1) cəbri tənliyinə baxaq, burada $a_0,...,a_n$ məlum ədədlərdir, n-natural ədəddir. Kökün varlıq teoremi ("kompleks ədədlər nəzəriyyəsinin əsas teoremi") və onların sayı ilə əlaqədar olan teorem ("cəbrin əsas teoremi") yalnız kökün varlığını və genişlənmiş meydanda onların sayı haqqında biliyi verdiyi halda, bu kökün praktik olaraq tapmaq üsulunu göstərmir. İxtiyari n dərəcəli cəbri tənliyin həllərinin axtarılması bir çox əsrlərdən bəri cəbr elminin klassik problemi olmuş və böyük riyaziyyatçılar bu məsələni tədqiq etmişlər. "Cəbri tənliklərin radikallarla həlli" problemi adlanan anlayışda məhz bu tarixi prosesin nəticəsidir. Sadə şəkildə desək, bu problemin mahiyyəti aşağıdakı sualla bağlıdır: verilmiş tənliyin köklərini cəbri əməllərin köməyilə onun əmsalları vasitəsilə ifadə etmək üçün ümumi bir alqoritm və ya düstur varmı? Burada "radikallarla həlli" termini ona görə hallanır ki, bu düsturlarda kökalma əməli ilə əlaqədar olaraq radikal işarəsi iştirak edir. $n = 1,2,3,4$ dərəcəli cəbri tənliklər həlli üçün bu suala müsbət cavab vermək olur, yəni bu cəbri tənliklərin həlli üçün düsturlar vardır, bu düsturlarla hesab və cəbri əməllərin köməyilə tənliyin

kökləri onun əmsalları vasitəsilə tapıla bilir (və bu düsturlarda radikal işarəsi iştirak edir)[1].

Dərəcəsi beş və bundan yuxarı olan $(n \geq 5)$ cəbri tənliklərin həlli üçün düstur axtarışı uzun müddət davam etsə də bu sahədə müsbət nəticə əldə edilməmişdir. Təxminən eyni vaxtda İtalyan riyaziyyatçısı Ruffin və Norveç riyaziyyatçısı Abel (1820) qismən (Riyaziyyat tarixində bu kəşf "Ruffin-Abel teoremi" adı ilə məşhurdur) və Fransız riyaziyyatçısı Qalua (1830) bu işin qeyri-mümkünlüyünü tam sübuta yetirdilər. Bununla da dərəcəsi beş və beşdən yuxarı tənliklərin həlli üçün ümumi şəkildə düstur axtarışına son qoyuldu. Amma bu nailiyyət yuxarı $(n \geq 5)$ dərəcəli cəbri tənliklərin bəzi xüsusi növlərinin köklərinin tapılması üçün bu və ya digər xüsusi halların olmasını istisna etmir.

Bu işdə altı dərəcəli

$$x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0. \tag{2}$$

(2) cəbri tənliyə baxılır, burada $a_1,...,a_6$ məlum ədədlərdir.

Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$$b_2 = 15\left(\frac{a_1}{6}\right)^2 - \frac{5a_1^{\ 2}}{6} + a_2 \ ;$$

$$b_3 = -20\left(\frac{a_1}{6}\right)^3 + \frac{5a_1^{\ 3}}{18} - \frac{2a_1a_2}{3} + a_3;$$

$$b_4 = 15\left(\frac{a_1}{6}\right)^4 - 10a_1\left(\frac{a_1}{6}\right)^3 + \frac{a_2a_1^{\ 2}}{6} - \frac{a_1a_3}{2} + a_4 \ ;$$

$$b_5 = -6\left(\frac{a_1}{6}\right)^5 + 5a_1\left(\frac{a_1}{6}\right)^4 - 4a_2\left(\frac{a_1}{6}\right)^3 + 3a_3\left(\frac{a_1}{6}\right)^2 - \frac{a_1a_4}{3} + a_5 \ ;$$

$$b_6 = \left(\frac{a_1}{6}\right)^6 - a_1\left(\frac{a_1}{6}\right)^5 + a_2\left(\frac{a_1}{6}\right)^4 - a_3\left(\frac{a_1}{6}\right)^3 + a_4\left(\frac{a_1}{6}\right)^2 - \frac{a_1a_5}{6} + a_6 \ ;$$

$$c_2 = b_4 - \frac{b_2^{\ 2}}{4} \ ; \ c_3 = b_5 - \frac{b_2b_3}{2} \ ; \ c_4 = b_6 - \frac{b_3^{\ 2}}{4}. \tag{3}$$

Aşağıdakı lemmalar doğrudur:

Lemma 1. Fərz edək ki, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 və a_6-həqiqi ədədlərdir. Əgər $c_2 > 0$ və $4c_2c_4 > c_3^{\ 2}$ isə, onda (2) tənliyinin həqiqi həlli yoxdur.

Lemma 2. Fərz edək ki, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 və a_6-həqiqi ədədlərdir. Əgər $c_2 \rangle 0$ və $4c_2c_4 = c_3^{\ 2}$ olduqda tənliyinin həqiqi kökü varsa o yeganədir və bu həll

$$x_1 = -\frac{c_3}{2c_2} - \frac{a_1}{6} \tag{4}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Lemma 3. Əgər $c_2 > 0$ və $4c_2c_4 = c_3^{\ 2}$ olduqda (4) düsturu ilə təyin olunan x_1 ədədi (2) tənliyinin həlli deyilsə, onda altı dərəcəli (2) tənliyi aşağıdakı iki kompleks əmsallı kub tənliklərin dizyunksiyaları ilə eynigüclüdür.

$$\left(x+\frac{a_1}{6}\right)^3+\frac{b_2}{2}\left(x+\frac{a_1}{6}\right)+\frac{b_3}{2}\pm\sqrt{-1}\left[\sqrt{c_2}\left(x+\frac{a_1}{6}\right)+\frac{c_3}{2\sqrt{c_2}}\right]=0. \qquad (5)$$

Lemma 4. Əgər $c_2 < 0$ və $4c_2c_4 = c_3^{\ 2}$ olduqda altı dərəcəli (2) tənliyi aşağıdakı kub tənliklərin dizyunksiyaları ilə eynigüclüdür.

$$\left(x+\frac{a_1}{6}\right)^3+\frac{b_2}{2}\left(x+\frac{a_1}{6}\right)+\frac{b_3}{2}=\pm\left[\sqrt{-c_2}\left(x+\frac{a_1}{6}\right)-\frac{c_3}{2\sqrt{-c_2}}\right]. \qquad (6)$$

Lemma 5. Fərz edək ki, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 və a_6-həqiqi ədədlərdir. Əgər $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ və $c_4 \rangle 0$ isə, onda (2) tənliyinin həqiqi kökü yoxdur.

Lemma 6. Əgər $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ və $c_4 \rangle 0$ isə, onda altı dərəcəli (2) tənliyi aşağıdakı iki kompleks əmsallı kub tənliklərin dizyunksiyaları ilə eynigüclüdür.

$$\left(x+\frac{a_1}{6}\right)^3+\frac{b_2}{2}\left(x+\frac{a_1}{6}\right)+\frac{b_3}{2}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{c_4}\,. \qquad (7)$$

Lemma 7. $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ və $c_4 \le 0$ olduqda altı dərəcəli (2) tənliyi aşağıdakı iki kub tənliyin dizyunksiyası ilə eynigüclüdür.

$$\left(x+\frac{a_1}{6}\right)^3+\frac{b_2}{2}\left(x+\frac{a_1}{6}\right)+\frac{b_3}{2}=\pm\sqrt{-c_4}\,. \qquad (8)$$

İsbatı:

$$x = t-\frac{a_1}{6} \qquad (9)$$

əvəzləməsindən sonra (2) tənliyindən alırıq:

$$t^6+b_2t^4+b_3t^3+b_4t^2+b_5t+b_6=0. \qquad (10)$$

(10) tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\left(t^3+\frac{b_2}{2}t+\frac{b_3}{2}\right)^2+c_2t^2+c_3t+c_4=0 \qquad (11)$$

(11) tənliyindən istifadə etməklə 5-ci, 6-cı, 7-ci lemmaların isbatı asanlıqla alınır. $c_2 \neq 0$ olduqda

$$c_2t^2+c_3t+c_4 \equiv c_2\left(t+\frac{c_3}{2c_2}\right)^2+\frac{4c_2c_4-c_3^{\ 2}}{4c_2} \qquad (12)$$

eyniliyini (11) tənliyində nəzərə alsaq, 1-ci lemmanın hökmünün doğru olduğunu alırıq.

$4c_2c_4 = c_3^2$ olduqda (12)-dən

$$c_2t^2 + c_3t + c_4 \equiv c_2\left(t + \frac{c_3}{2c_2}\right)^2 \tag{13}$$

eyniliyini alırıq. (13)-ü (11)-də nəzərə almaqla 2-ci,3-cü və 4-cü lemmaların isbatını asanlıqla alırıq.

Teorem 1. (2) tənliyinin əmsalları

$$a_3 = \frac{1}{27}\left(18a_1a_2 - 5a_1^3\right)\ ;\ a_5 = \frac{1}{81}\left(27a_1a_4 - 3a_1^3a_2 + a_1^5\right)$$

(14) və yaxud

$$a_4 = \frac{a_2^2}{4} + \frac{5a_1^4}{64} + \frac{a_1a_3}{2} - \frac{3a_2a_1^2}{8}\ ;$$

$$a_5 = \frac{1}{2}\left(a_2 - \frac{1}{4}a_1^2\right)\left(a_3 - \frac{1}{2}a_1a_2 + \frac{1}{8}a_1^3\right) \tag{15}$$

məhdudiyyətlərini ödəyərsə onda bu tənlik radikallarla həll olunandır.

İsbatı: (14) şərti daxilində (2) tənliyini belə yazmaq olar:

$$\begin{gathered}\left(x^2 + \frac{a_1}{3}x\right)^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)\left(x^2 + \frac{a_1}{3}x\right)^2 + \\ + \left(a_4 - \frac{a_2a_1^2}{9} + \frac{a_1^4}{27}\right)\left(x^2 + \frac{a_1}{3}x\right) + a_6 = 0\end{gathered}. \tag{16}$$

(15) məhdudiyyətləri daxilində (2) tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\left(x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + \alpha x\right)^2 + \beta\left(x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + \alpha x\right) + a_6 = 0, \tag{17}$$

burada

$$\alpha = \frac{a_2}{2} - \frac{a_1^2}{8} \quad \text{və} \quad \beta = a_3 - \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1^3}{8}. \tag{18}$$

(16) və (17)-dən teoremin isbatı asanlıqla alınır.

Teorem 2: $a_1,...,a_6$ -həqiqi ədədlər olduqda, əgər (2) tənliyinin

$$x_1 = \alpha\sqrt{-1} \tag{19}$$

(burada α -həqiqi ədəddir) şəklində həlli varsa, onda

$$t_1 = \alpha^2, \tag{20}$$

müsbət həqiqi ədədi

$$a_1t^2 - a_3t + a_5 = 0 \tag{21}$$

kvadrat tənliyinin həllidir.

İsbatı: (19)-u (2) tənliyində yerinə yazsaq

$$\left(-\alpha^6 + a_2\alpha^4 - a_4\alpha^2 + a_6\right) + \left(a_1\alpha^5 - a_3\alpha^3 + a_5\alpha\right)\sqrt{-1} = 0 . \qquad (22)$$

Buradan teoremin isbatı asanlıqla alınır.

Nəticə: Əgər həqiqi əmsallı (21) kvadrat tənliyinin müsbət həlli yoxdursa, onda həqiqi əmsallı (2) tənliyinin (19) şəklində həlli ola bilməz.

ƏDƏBİYYAT

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, М.: Наука, 1975.

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ, НАЛОЖЕННЫМИ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ

Э.А.ГАСЫМОВ, У.Н.ГАСАНОВА, А.О.ГУСЕЙНОВА

РЕЗЮМЕ

По теореме Руффина-Абеля при $(n \geq 5)$ не возможно найти решение в общем виде в радикалах для алгебраического уравнения с порядком n $(n \geq 5)$. Но эта теорема не исчерпывает возможности решения некоторых алгебраических уравнений при помощи некоторых способов.

В работе даказывается возможность решения в радикалах для некоторых уравнений шестого порядка. При ограничениях вещественности коэффициентов уравнения указывается достаточное условие, при котором решения уравнения не будут чисто мнимыми.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, корень уравнения, решение в радикалах.

THE SOLUTION OF SIXTH DEGREE ALGEBRAIC EQUATIONS WHICH HAVE ADDITIONAL CONDITIONS ON THE COEFFICIENTS

E.A. GASIMOV, U.N. HASANOVA, A.O. HUSEYNOVA

SUMMARY

According to Abel-Ruffin theorem, it is impossible to find a general solution of algebraic equations with a degree not less than five $(n \geq 5)$ with radicals. But this theorem does not rule out the existeme of any special methods for finding the roots of special kinds of algebraic equations.

The work proves the possibility of solving a special kind of the sixth degree algebraic equation with radicals. When the coefficients of the equation are real numbers, there are sufficient conditions for the roots of the considered equation to be pure complex.

Key words: algebraic equation, root of equation, solution with radical.

Redaksiyaya daxil oldu: 16.02.2015-ci il
Çapa imzalandı: 20.04.2015-ci il